1460 - لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$

A. 1] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ I_{n+1}\leq I_n$

2] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$

3] بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} I_n$

4] لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $\varphi(n)=I_{n+4}-I_n$

احسب $\varphi(n)$ بدلالة n.

5] أ) احسب I_0 و I_2

ب) احسب ، بدلالة I_2 و I_{4k+2} ، المجموع $\sum_{p=0}^{k-1}\varphi(4p+2)$ لكل k من $\mathbb{N}^*$.

ج) استنتج $\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{q=0}^{2k}\frac{(-1)^q}{2q+1}\right)$

6] أ) احسب I_1 و I_3.

ب) احسب ، بدلالة I_1 و I_{4k+1} ، المجموع $\sum_{p=0}^{k-1}\varphi(4p+1)$ لكل k من $\mathbb{N}^*$.

ج) استنتج $\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{q=1}^{2k}\frac{(-1)^{q+1}}{q}\right)$

B. ليكن α من $]0;\frac{\pi}{4}[$. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $K_n(\alpha)=\int_0^\alpha \tan^n x\,dx$ و $S_n(\alpha)=\sum_{m=1}^{n}K_m(\alpha)$

1] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \left|S_n(\alpha)-\int_0^\alpha\frac{\tan x}{1-\tan x}dx\right|\leq\frac{\alpha\tan^{n+1}\alpha}{1-\tan\alpha}$

2] استنتج $A(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}S_n(\alpha)$ بدلالة α.

C. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n=I_1+I_2+\dots+I_n$

1] أ) ليكن M من $\mathbb{R}_+^*$. احسب $\lim_{\alpha\to(\frac{\pi}{4})^-}A(\alpha)$ ثم بين أن : $(\exists\beta\in]0;\frac{\pi}{4}[);\ A(\beta)>M+1$

ب) بيّن أن : $(\exists n_0\in\mathbb{N}^*);(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ (n\geq n_0\Rightarrow|A(\beta)-S_n(\beta)|<1)$

2] بيّن أن : $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$

D. لكل n من $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ ، نضع : $E_n=I_n+I_{n+1}+2\left(\sum_{k=n+2}^{2n-1}I_k\right)+I_{2n}+I_{2n+1}$

بيّن أن : $\lim_{n\to+\infty}E_n=\ln 2$

- 1472

لكل n من $\mathbb{N}$. نضع : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$

1] بين أن : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2] احسب I_0 و I_1 .

3] باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بيّن أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$

4] بيّن أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ و $I_{2n} = \dfrac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$

5] أ) بيّن أن المتتالية $(I_n)_{n\geq 0}$ تناقصية .

ب) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 \leq \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$ ثم أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$

ج) استنتج أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2} \right) = \pi$

[هذه النتيجة تحمل اسم صيغة ڤاليس Wallis]

6] لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $K_n = (n+1) I_n I_{n+1}$.

بين أن $(K_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة واستنتج أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} = 1$

7] باستعمال نتيجة 4] ، بيّن أن : $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2 \times 4^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$

1460 - لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$

A. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $a_n = f_n(n)$

1] ادرس تقارب المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2] أ) بين أن : $(\forall t\in[0;1]) \quad \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$

ب) استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

3] أ) بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

ب) استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}) \quad a_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}$

4] أ) بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}) \quad \int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

ب) استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}) \quad a_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$ ثم حدّد نهاية (a_n)

B. لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$

1] احسب $F_1(x)$

2] بيّن أنه لكل t من $\mathbb{R}_+$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$: $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$

استنتج تأطيراً للعدد $F_n(x)$

3] أ) بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$

ب) حدّد تكبيراً آخر للعدد $F_n(x)$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$

4] أ) حدد علاقة بين $F_n(x)$ و $F_{n+1}(x)$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ب) استنتج أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad F_n(x) = 1 - e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

5] بيّن أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+^*) \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

1473 - لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع

$$E_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, dt \quad \text{و} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, dt$$

1] أ) بيّن أن : $J_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بيّن أن : $(2n+2) J_{n+1} = (2n+1) J_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2] باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بيّن أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad E_{n+1} - E_n = -\frac{1}{2n+1} E_{n+1} - \frac{2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt$$

3] استنتج أن :

أ) $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{2n+2}{2n+1} E_{n+1} - E_n = -\frac{2}{(2n+1)(2n+2)} J_{n+1}$$

ب) $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{E_{n+1}}{J_{n+1}} - \frac{E_n}{J_n} = -\frac{1}{2(n+1)^2}$$

4] لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

بيّن أن : $$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n = 2\left(\frac{E_0}{J_0} - \frac{E_n}{J_n} \right)$$

5] بيّن أن : $x \leq \frac{\pi}{2} \sin x \quad \left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$

6] استنتج أن : $0 \leq E_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} J_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

7] بيّن أن : $$\lim_{n \to +\infty} U_n = 2 \frac{E_0}{J_0} = \frac{\pi^2}{6}$$

8] لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$

أ) بيّن أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_{2n+1} - U_{2n+1} = -\frac{1}{2} U_n$

ب) استنتج أن : $$\lim_{n \to +\infty} V_{2n+1} = \frac{\pi^2}{12}$$